ISDN- und PCM-Systeme

Michael Dienert

29. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Digitale Übertragung und Speicherung von Audiosignalen

1.1 Ein paar Definitionen

Heutzutage ist ja alles digital und jeder verwendet den Begriff *digital* meist ohne sich genauer zu überlegen, was das heisst.
Deshalb wird hier jetzt erstmal definiert, was *analoge* und was *digitale* Signale sind:

1.1.1 Analoge Signale

Analoge Signale sind werte- und zeitkontinuierlich

wertekontinuierlich - zwischen zwei verschiedenen Amplitudenwerten des Signals gibt es *unendlich* viele Zwischenwerte

zeitkontinuierlich - zwischen zwei Punkten auf der Zeitachse liegen *unendlich* viele Zeitpunkte, zu denen je ein Amplitudenwert existiert.

1.1.2 Digitale Signale

Digitale Signale sind werte- und zeitdiskret

wertediskret - die Amplitude des Signals kann nur ganz bestimmte -man sagt diskrete- Werte annehmen. Zwischen zwei Werten gibt es *keine* Zwischenwerte. Da somit die Anzahl überhaupt möglicher Werte begrenzt ist, kann man die Werte durch binäre Zahlen mit fester Bitlänge darstellen.

Den Vorgang, diskrete Messwerte des Originalsignals zu erfassen nennt man **Quantisierung** (Quantum = messbare Menge).

zeitdiskret - zeitdiskret heisst, dass das Signal nur zu bestimmten Zeitpunkten (die meistens auch noch den gleichen Zeitabstand voneinander haben) eine Amplitude hat. Zwischen zwei Zeitpunkten ist überhaupt kein Signal da. Damit hat man nur eine endliche Menge von Werten, was es erst möglich macht, Musik oder Sprache oder Videosignale digital zu speichern oder zu übertragen.

Das Messen der Signalamplitude zu bestimmten (diskreten) Zeitpunkten nennt man **Abtastung**.

Die Abbildung 1 zeigt, wie aus einem zeit- und wertekontinuierichen Signal ein digitales Signal entseht.

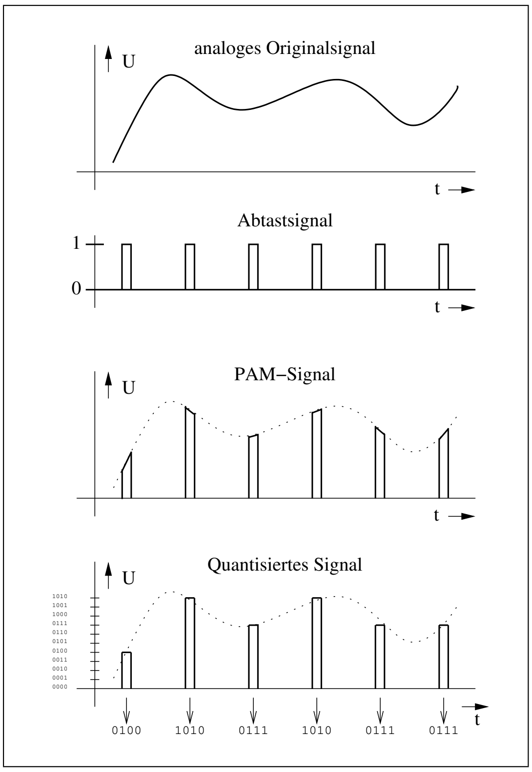

Abbildung 1: Abtastung und Digitalisierung eines Analogsignals

Nun hat man bei digitalen Signalen ein Problem: das ursprüngliche analoge Signal hat ja unendlich viele Werte zu unendlich vielen Zeitpunkten, beim digitalen Signal sind nur noch endlich viele Werte zu endlich vielen Zeitpunkten vorhanden.

Anders ausgedrückt: beim digitalen Signal fehlt scheinbar etwas, es ist also nicht mehr orginalgetreu.

Im Folgenden wird gezeigt werden, dass der Fehler, den man dabei erzeugt nur durch die Beschränkung auf *diskrete Amplitudenstufen* entsteht.

Diesen Fehler kann man dadurch beliebig klein halten, dass man die *Bitanzahl* mit der man die Amplitudenstufen darstellt vergrössert.

Bereits mit den 16Bit einer Standard-Audio-CD ist der Fehler so klein, dass ihn auch der abgehobendste High-End-Audio-Spinner nicht hören kann [1]. Die SACD ist also nur ein Marketing-Gag. [2]

Die Tatsache, dass man nur zu bestimmten Zeitpunkten (zeitdiskret) Werte des Originalsignals misst und speichert, führt *nicht* zu einer Verfälschung des Originalsignals, wenn eine bestimmte Bedingung eingehalten wird. Welche Bedingung das ist und warum kein Fehler entsteht wird in den folgenden Abschnitten behandelt.

[1] Auf jeden Fall in dem Alter nicht mehr hören kann, das man erreicht haben muss um das nötige Kleingeld für High-End-Audio beisammen zu haben

[2] Es gibt natürlich an dieser Stelle immer wieder den Einspruch, dass alte Vinyl-Analogplatten doch viel besser klingen als CDs. Mag sein, dass das Klangverhalten einer Analog-Platte als besser empfunden wird, dieser Effekt ist jedoch auf eine leichte Phasenschwankung zwischen dem Monoanteil des rechten- und linken Kanals zurückzuführen. Diese Phasenschwankung erzeugt den als *Phasing* in der Musikelektronik bekannten Effekt. Wer das mag, soll sich halt einen Phaser an seinen CD-Spieler klemmen. Oder das Phasing durch Signal-Prozessing erzeugen ...

2 Fourier: alle Signale bestehen aus Sinusschwingungen

Der Schlüssel zum Verständnis der Abtastung liegt in einer Erkenntnis, die der französische Mathematiker und Physiker *Jean Baptiste Fourier* bereits 1807 entdeckt hat:

Alle periodischen Signale lassen sich aus sinusförmigen Teilschwingungen zusammensetzen.

Nun ist alles was unser *Ohr hören kann* ein periodisches Signal. Auch Signale, die scheinbar nicht periodisch sind, wie z.B. ein Knall oder ein Schuss sind letztendlich doch aus periodischen Signalen zusammengesetzt.

Das heisst also, man kann die Behauptung von Fourier auf alle Signale anwenden.

Als Beispiel sei hier die *Fourier-Reihe* der *Rechteckschwingung* gezeigt:

$$r(t) = 2.5V + \frac{10V}{\pi}(sin\omega t + \frac{1}{3}sin3\omega t + \frac{1}{5}sin5\omega t + \cdots) \tag{1}$$

Diese Reihe ergibt eine Rechteckschwingung, bei der das Verhältnis von Impulsbreite zur Periodendauer , $T_i/T = 1/2$, ist.

Macht man dieses Verhältnis kleiner, erzeugt also schmalere Rechteckimpulse, benötigt man wesentlich mehr Teilschwingungen.

Abb. 5 zeigt die *Spektren* einer reinen Sinusschwingung, einer Rechteckschwingung mit $T_i/T = 1/2$ und einer Rechteckschwingung mit $T_i/T = 1/16$.

Mit *Spektrum* ist dabei die Darstellung der Teilschwingungen auf der **Frequenzachse** gemeint. Die Teilschwingungen werden in diesem Diagramm als Linien eingezeichnet und man nennt sie deshalb auch *Spektrallinien* oder einfach nur *Linien*.

Die Abb. 2 ist eine einfache Übung die verdeutlicht, dass eine Rechteckschwingung tatsächlich aus Sinusschwingungen zusammengesetzt ist.

Addiert man die beiden gezeigten Sinuskurven erhält man eine Kurvenform, die bereits einigermassen rechteckförmig ist. Diese beiden Sinuskurven sind die ersten beiden Sinusfunktionen aus der Formel (1).

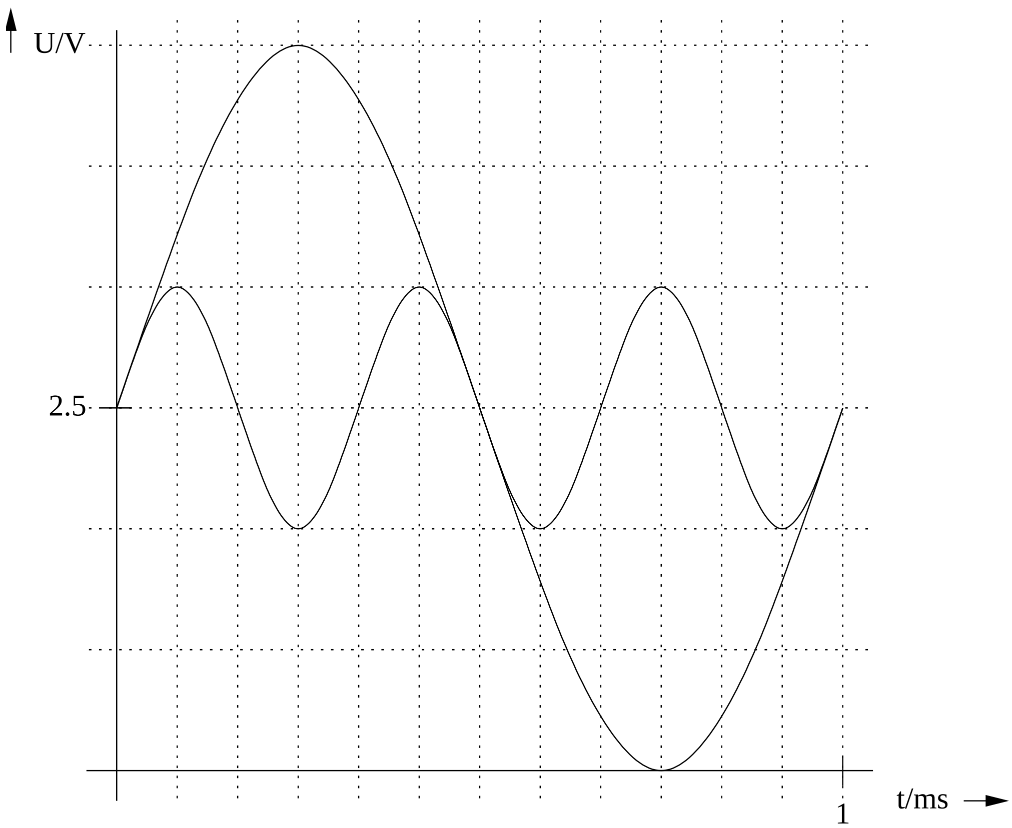

Abbildung 2: Übung zur Addition von Grundwelle und erster Oberwelle

2.1 Darstellung von Fourierreihen mit dem Programm gnuplot

Das Programm `gnuplot` ist ein Kommandozeilenprogramm, mit dem mathematische Funktionen oder Messwerte auf dem Bildschirm gezeichnet, also geplottet werden können.
Hier eine Befehlsfolge, mit der Grundwelle und erste Oberwelle einer symmetrischen Rechteckschwingung geplottet werden können:

```
gnuplot> set dummy t
gnuplot> set xrange[0:1]
gnuplot> a(t)=sin(2*pi*1*t)
gnuplot> b(t)=sin(2*pi*3*t)/3
gnuplot> plot a(t),b(t),a(t)+b(t)
```

Das Ergebnis von `gnuplot` zeigt Abb. 3.

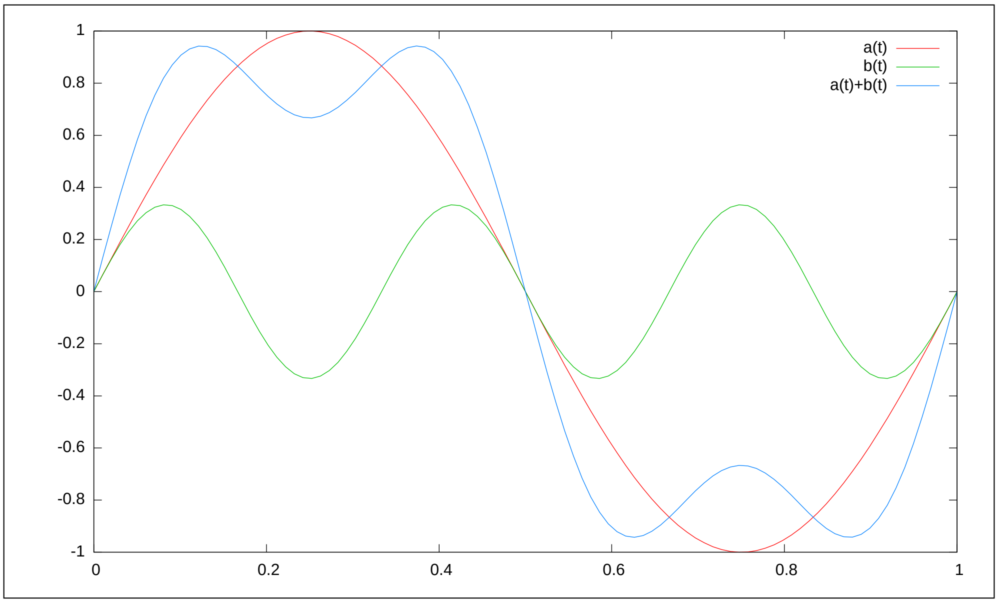

Abbildung 3: Fourierreihe der Rechteckfunktion mit gnuplot gezeichnet

Abb. 4 zeigt den Funktionsverlauf folgender Reihe:

$$r(t) = sin(2\pi \cdot 1 \cdot t) + \frac{1}{3} sin(2\pi \cdot 3 \cdot t) + \frac{1}{5} sin(2\pi \cdot 5 \cdot t) + \frac{1}{7} sin(2\pi \cdot 7 \cdot t) + \frac{1}{9} sin(2\pi \cdot 9 \cdot t) \tag{2}$$

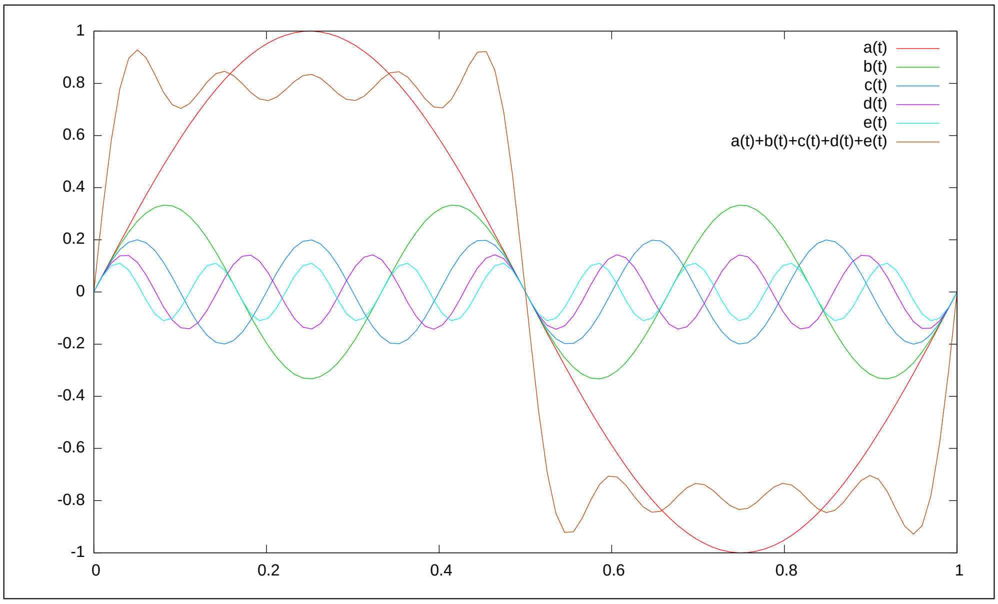

Abbildung 4: Annäherkung an die Rechteckfunktion

3 Frequenzspektrum

Wie oben schon erklärt, ist ein Spektrum die Darstellung aller Sinus-Teilschwingungen, aus denen sich ein beliebiges Signal (Sprache, Musik, Video) zusammensetzt. Zur Darstellung eines Spektrums, wird für jede Teilschwingung eine Linie auf einer Frequenzachse gezeichnet. Die Linienhöhe entspricht dabei der Amplitude der Teilschwingung.

Die Linien bei der Frequenz $f = 0Hz$ in allen Spektren der Abb. 5 stellen den *Gleichspannungsanteil* des jeweiligen Signals, also seinen zeitlichen Mittelwert, dar.

Hat man ein sich in Frequenz und Lautstärke ständig änderndes Signal, wie z.B. Musik oder Sprache, ändert sich auch laufend sein Frequenzspektrum und man zeichnet deshalb nur noch den Bereich, in dem die Teilschwingungen auftreten können.

So ein Frequenzbereich wird auch *Band* genannt. In Abb. 6 ist dies am Beispiel des Telefonsignals dargestellt.

Beim Telefonsignal hat man sich weltweit auf ein Sprachband von **300 bis 3400 Hz** geeinigt. Dieser Bereich ergibt zwar bei weitem keine HiFi-Qualität aber man erhält eine gute Sprachverständlichkeit ohne ein zu breites Frequenzband zu benötigen.

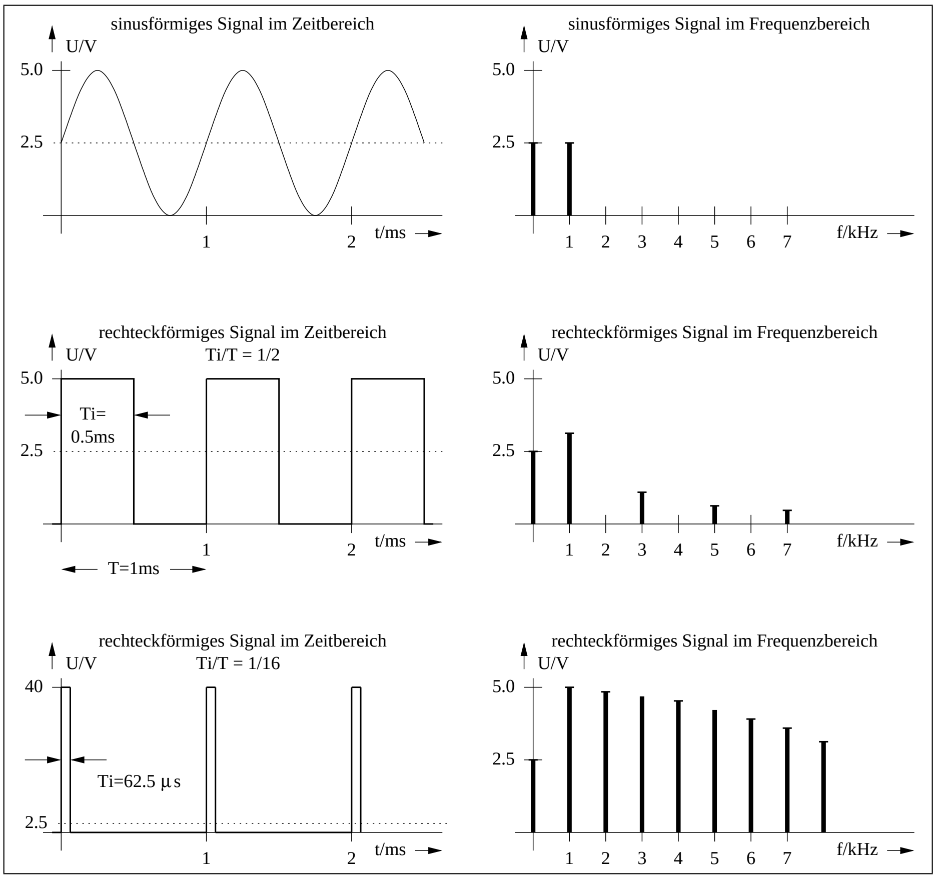

Abbildung 5: Frequenzspektrum der Sinus- und Rechteckschwingung

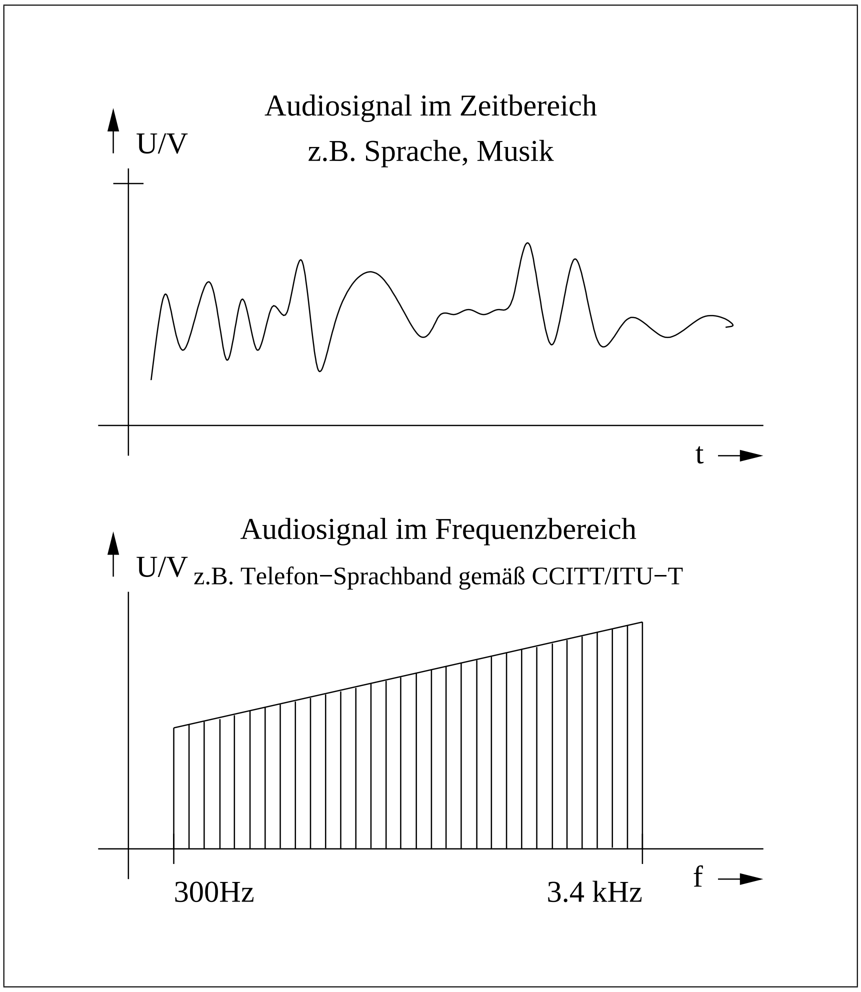

Abbildung 6: Das Telefonsignal im Zeit- und Frequenzbereich

4 Puls-Amplituden-Modulation

Bevor wir nun zu einem vollständig digitalen Signal kommen, wir das Analogsignal ersteinmal in ein Signal überführt, das nur zu bestimmten Zeitpunkten Werte hat. Solch ein Signal nennt man Puls-Amplituden-Signal (PAM-Signal).

Ein Puls-Amplituden moduliertes Signal erhält man, wenn man das Originalsignal mit einer Folge sehr schmaler Rechteckimpulse *multipliziert* (Siehe Abb. 7).

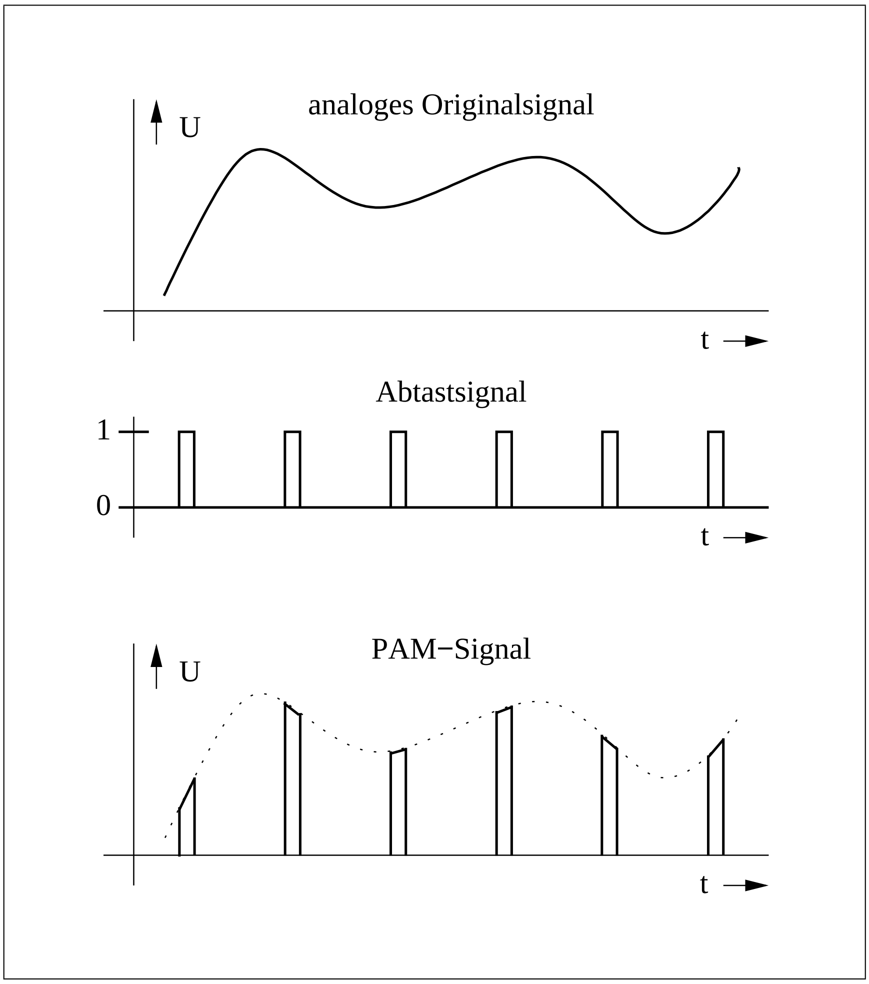

Abbildung 7: Puls-Amplituden-Modulation

4.1 Das Abtasttheorem

Wie weiter oben bereits behauptet, gilt Folgendes:

Das Abtasttheorem:
Im PAM-Signal sind *alle* Informationen enthalten, die auch im Originalsignal enthalten sind, wenn die Abtastrate **mindestens doppelt so hoch** wie die höchste im Original vorkommende Frequenz, ist.

Wenn man das PAM-Signal mit dem Originalsignal vergleicht (Abb. 7), scheint diese Behauptung schwer vorstellbar zu sein: obwohl im PAM-Signal Teile komplett weggelassen wurden, soll noch die gesamte Information des Originalsignals enthalten sein?

Um das Abtasttheorem begründen zu können, muss man die Signale im Frequenzbereich betrachten. Dies soll im Folgenden am Beispiel des Telefon-Sprachbands geschehen. Das Telefonsignal haben wir ja bereits in Frequenz- und Zeitbereich kennengelernt (Abb. 6).

Da man sich jedes Signal im Frequenzbereich als Summe vieler Sinusschwingungen vorstellen kann, betrachten wir zuersteinmal eine reine Sinusschwingung. Für die Multiplikation zweier Sinusschwingungen gilt folgende Formel (steht in jeder Formelsammlung):

$$sin(x) \cdot sin(y) = \frac{1}{2} cos(x-y) - \frac{1}{2} cos(x+y) \tag{3}$$

Damit wir nun nicht allzuviel Mathematik betreiben müssen, kann man die Bedeutung dieser Formel in der Nachrichtentechnik auch in Worten so beschreiben:

Multipliziert man zwei sinusförmige Signale unterschiedlicher Frequenz, erhält man zwei neue Signale deren Frequenzen jeweils die **Summe** und die **Differenz** der Originalfrequenzen sind.

Noch einfacher lässt sich das grafisch darstellen: Abb. 8 zeigt zuerst die Multiplikation zweier Frequenzen.

Wenn man dies mit allen Frequenzen des Sprachbands wiederholt, erhält man zwei Bänder: eins oberhalb von 8kHz, das nennt man *oberes Seitenband* und eins unterhalb 8kHz, das heisst dann natürlich *unteres Seitenband*. Das ist in der Mitte von Abb. 8 dargestellt. [3] Im untersten Teil von Abb. 8 wird nun das Spektrum einer Rechteckschwingung mit *sehr schmalen Impulsen* mit unserem Originalsignal multipliziert.

Diese schmalen Impulse nennt man **Abtastsignal**. In der Abb. 8 erkennt man, dass die Frequenzlinien des Abtastsignals **mindestends 8kHz auseinander (also doppelt so weit wie die höchste Originalsignalfrequenz)** sein müssen, sonst würden sich die verschiedenen Seitenbänder überlappen.

Wenn sich die Seitenbänder überlappen würden, hätte man eine massive Verfälschung des Originalsignals.

So wie in Abb. 8 dargestellt, kann man nun aber die ganzen Seitenbänder oberhalb von 4kHz **wegfiltern** und dann bleibt nur das absolut unverfälschte Originalband übrig.
D.h. PAM überträgt das Original unverfälscht, wenn die Abtastfrequenz doppelt so hoch wie die höchste Originalsignalfrequenz ist!

[3] Übrigens ist das genau die Art und Weise, wie AM-Rundfunk funktioniert: man mulitpliziert das Sprachband mit einem Trägersignal (z.B. 1MHz) und strahlt die beiden Seitenbänder mit einer Antenne ab. Im AM-Radio werden die Seitenbänder dann wieder in ihre Originalposition zurückgeschoben.

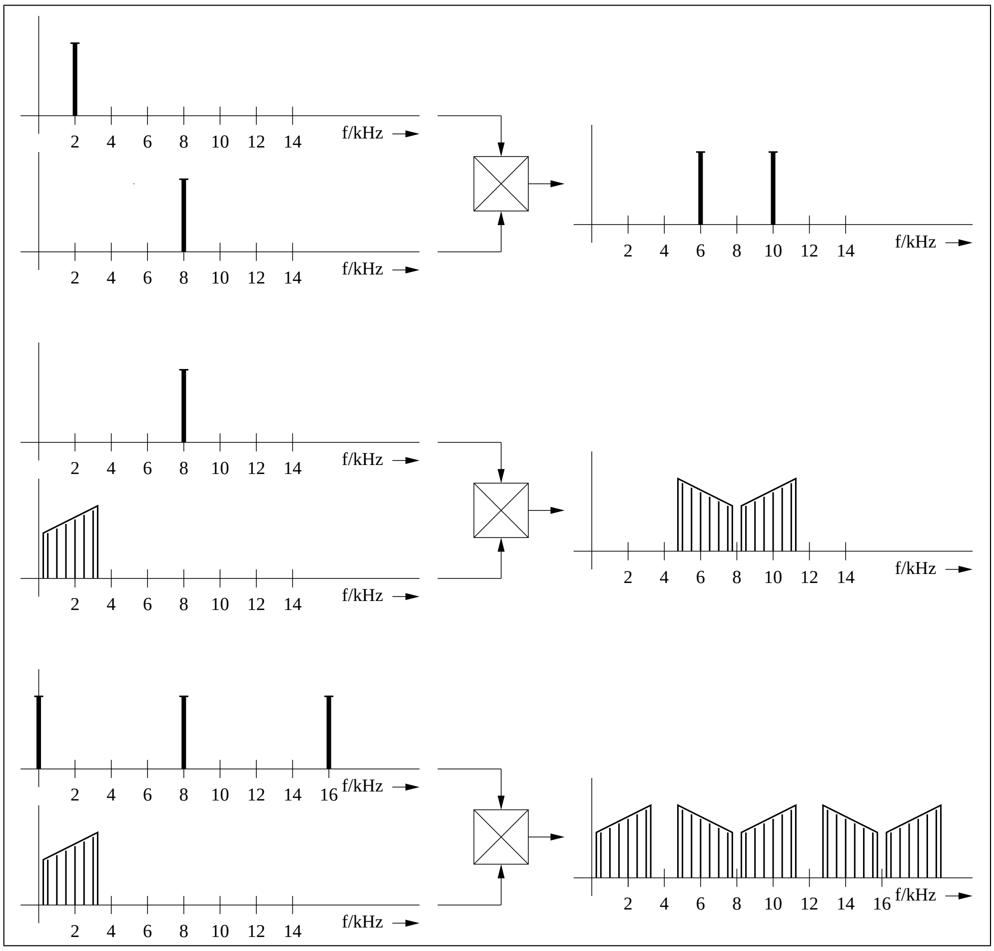

Abbildung 8: Multiplikatin von Signalen bei der Abtastung (PAM)